Mario MILANESE

Dipartimento di Automatica e Informatica

Politecnico di Torino

FONDAMENTI DI IDENTIFICAZIONE DI SISTEMI DINAMICI

COSTRUZIONE DEI MODELLI

- Si vuole studiare un <u>sistema reale</u> con un certo <u>scopo</u> ⇒
  - predizione
  - controllo
  - comprensione
  - progettazione
  - diagnostica

- Sono disponibili <u>due tipi di informazioni</u>

"a priori" – informazioni pregresse, ipotesi plausibili, leggi ...

"a posteriori" – informazioni sperimentali

COSTRUZIONE DEI MODELLI

- Inf. "a priori" → • Struttura del modello matematico
  ↓
  $M(p)$
  ↑
  costanti non note

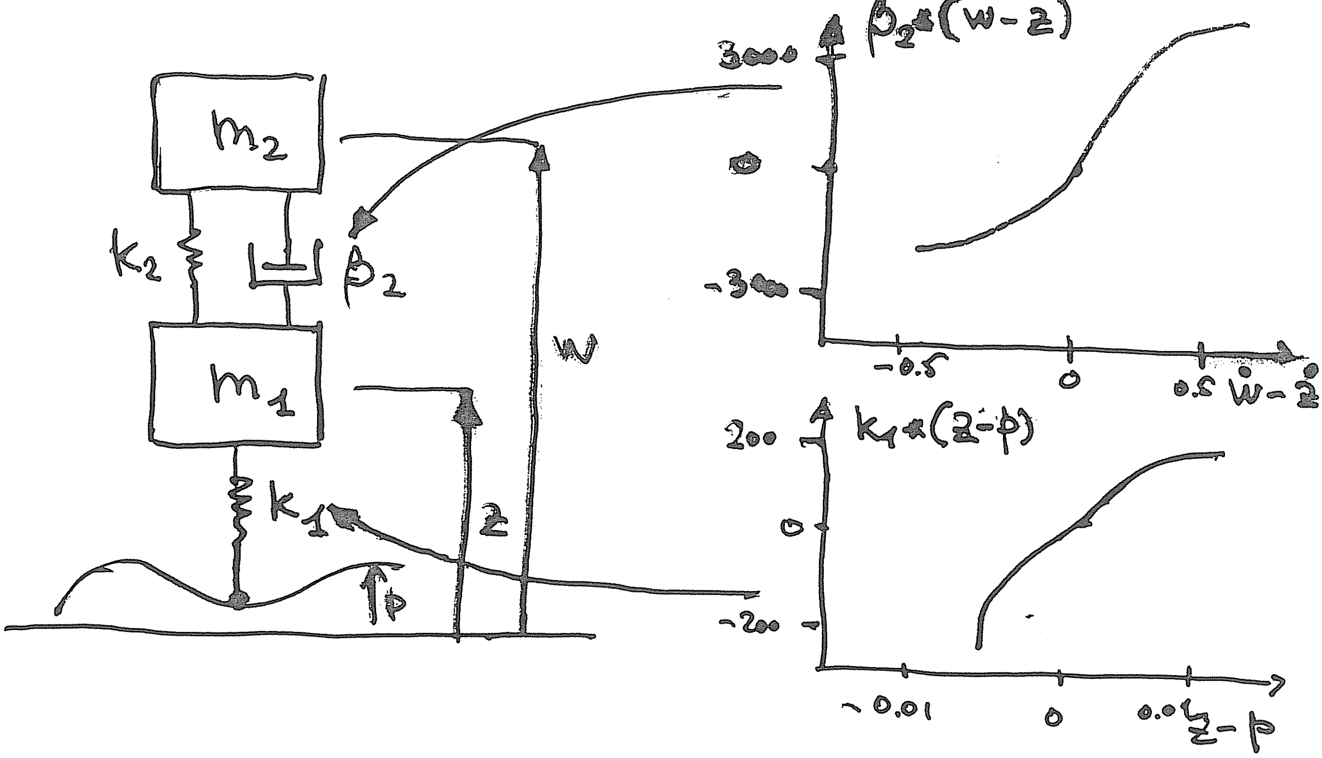
- Inf. "a posteriori" →
  - Stima delle costanti p
  - Valutazione della "consistenza" di inf. "a priori" e "a posteriori"
  - Valutazioni degli errori.

Tipi di modelli:

- BLACK-BOX: riproduzione del comportament <u>I-O</u>
- FISICI: riproduzione della struttura <u>interna</u>

ESEMPIO: DINAMICHE VERTICALI DI AUTO

· Modello "QUARTER CAR"



$$
\begin{cases}
m_1 \ddot{z} = k_1(p-z) + k_2(w-z) + \beta_2(\dot{w}-\dot{z}) \\
m_2 \ddot{w} = k_2(z-w) + \beta_2(\dot{z}-\dot{w})
\end{cases}
$$

Ponendo: $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$, $x_3 = w$, $x_4 = \dot{w}$

$\Downarrow$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k_1+k_2}{m_1} x_1 - \frac{\beta_2}{m_1} x_2 + \frac{k_2}{m_1} x_3 + \frac{\beta_2}{m_1} x_4 + \frac{k_1}{m_1} p$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{\beta_2}{m_2} x_2 - \frac{k_2}{m_2} x_3 - \frac{\beta_2}{m_2} x_4$$

ESEMPIO : MODELLO "QUARTER CAR"

- Se k_1, k_2, β_2 <u>non</u> sono costanti

$$\Downarrow$$

sistema di <u>equazioni di stato nonlineari</u>

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

stati $\longrightarrow$ $[z, \dot{z}, w, \dot{w}]^T$ $\qquad$ $p \leftarrow$ ingresso

- Se si misurano le accellerazioni:

$$y_1 = \ddot{w} = \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{\beta_2}{m_2} x_2 - \frac{k_2}{m_2} x_3 - \frac{\beta_2}{m_2} x_4$$

$$y_2 = \ddot{z} = \frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 - \frac{\beta_2}{m_1} x_2 + \frac{k_2}{m_1} x_3 + \frac{\beta_2}{m_1} x_4 + \frac{k_1}{m_1} p$$

$$\Downarrow$$

equazioni di <u>uscita nonlineari</u>

$$y(t) = \eta(x(t), u(t))$$

$[y_1, y_2]^T \leftarrow$ uscite

ESEMPIO: MODELLO "QUARTER CAR"

- Se k_1, k_2, β_2 <u>sono costanti</u>

$\Downarrow$

equazioni <u>ingresso-stato-uscita lineari</u>

$$\dot{x}(t) = F\,x(t) + G\,u(t)$$

$$y(t) = H\,x(t) + D\,u(t)$$

$\Uparrow$

Sistema "a tempo continuo" lineare

- Se F, G, H, D sono costanti nel tempo

$\Downarrow$

sistema LTI continuo

- Se F, G, H, D variano nel tempo

$\Downarrow$

sistema LTV continuo

```
F=[0 1 0 0;
  -(K1+K2)/m1 -b2/m1 K2/m1 b2/m1;
  0 0 0 1;
  K2/m2 b2/m2 -K2/m2 -b2/m2]


G=[0 K1/m1 0 0]'


H1=[K2/m2 b2/m2 -K2/m2 -b2/m2]

H2=[-(K1+K2)/m1 -b2/m1 K2/m1 b2/m1]

D1=0

D2=K1/m1
```

Modello Quarter car lineare

```
% Valori dei parametri
K1=150000;
K2=10000;
b2=5000;
m2=400;
m1=20;
% Matrici di equazioni ingresso-stato uscita
A=[0 1 0 0;
  -(K1+K2)/m1 -b2/m1 K2/m1 b2/m1;
  0 0 0 1;
  K2/m2 b2/m2 -K2/m2 -b2/m2]
B=[0 K1/m1 0 0]'
C1=[K2/m2 b2/m2 -K2/m2 -b2/m2]
C2=[-(K1+K2)/m1 -b2/m1 K2/m1 b2/m1]
D1=0
D2=K1/m1
s = tf('s');

% Funzione di trasferimento per la uscita 1
[NUM1,DEN1] = SS2TF(A,B,C1,D1,1);
SYS1 = TF(NUM1,DEN1)
[Z1,P1,K1] = TF2ZP(NUM1,DEN1)
figure(1)
BODE(SYS1,{0.01,10000})

% Funzione di trasferimento per la uscita 2
[NUM2,DEN2] = SS2TF(A,B,C2,D2,1);
SYS2 = TF(NUM2,DEN2)
[Z2,P2,K2] = TF2ZP(NUM2,DEN2)
figure(2)
BODE(SYS2,{0.01,10000})
```

Modello quarter car

$$M1 = \frac{9.375e004\ s^3 + 1.875e005\ s^2 + 1.059e{-008}\ s - 5.239e{-009}}{s^4 + 262.5\ s^3 + 8025\ s^2 + 9.375e004\ s + 1.875e005}$$

Z1 = [-2.0000, -0.0000, 0.0000]

P1 = 1.0e+002 * [-2.2926, -0.1537 + 0.0962i, -0.1537 - 0.0962i, -0.0249]

K1 = 9.3750e+004

$$M2 = \frac{7500\ s^4 + 9.375e004\ s^3 + 1.875e005\ s^2 - 5.007e{-006}\ s + 2.742e{-005}}{s^4 + 262.5\ s^3 + 8025\ s^2 + 9.375e004\ s + 1.875e005}$$

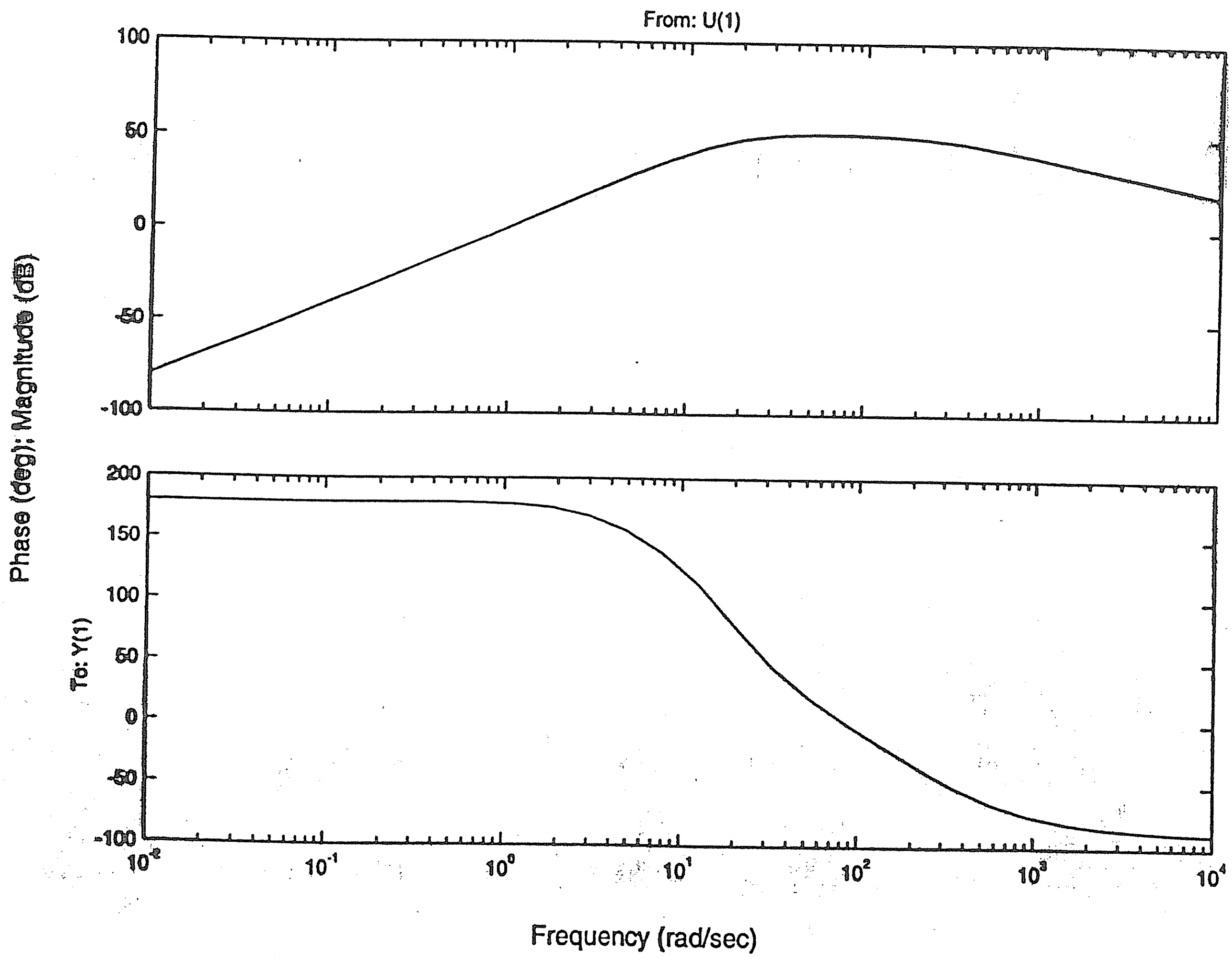
Z2 = [-10.0000, -2.5000, 0.0000, 0.0000]

P2 = 1.0e+002 *[-2.2926, -0.1537 + 0.0962, -0.1537 - 0.0962i, -0.0249]

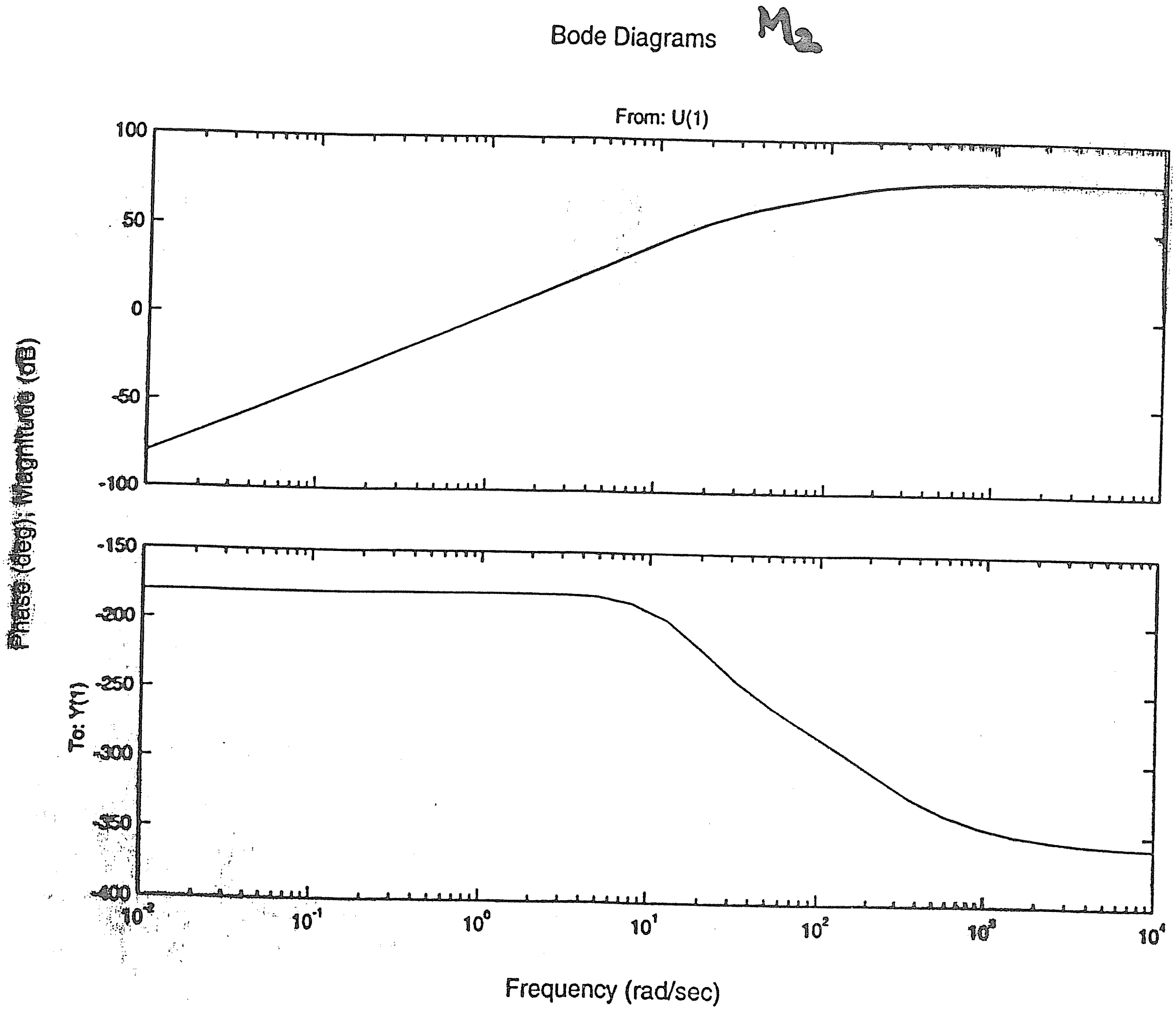
K2= 7500

Modello quarter car

Bode Diagrams Ma

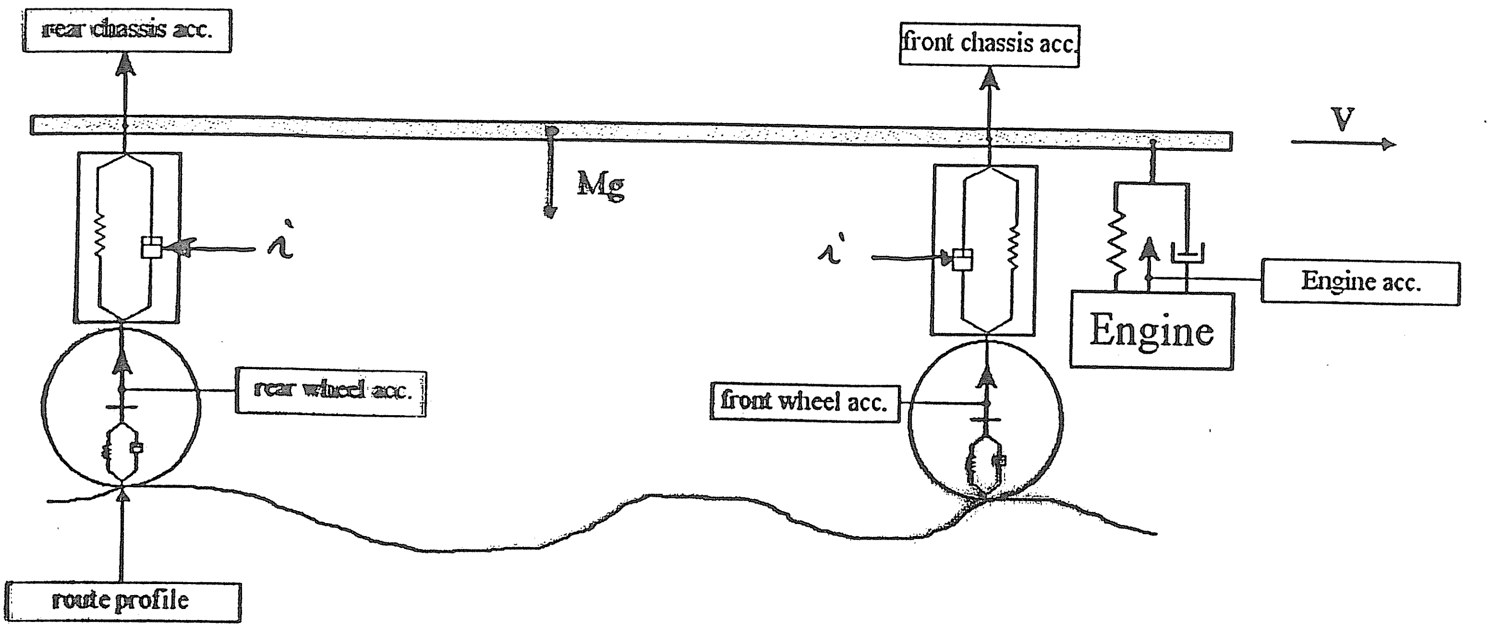


Modello quarter car

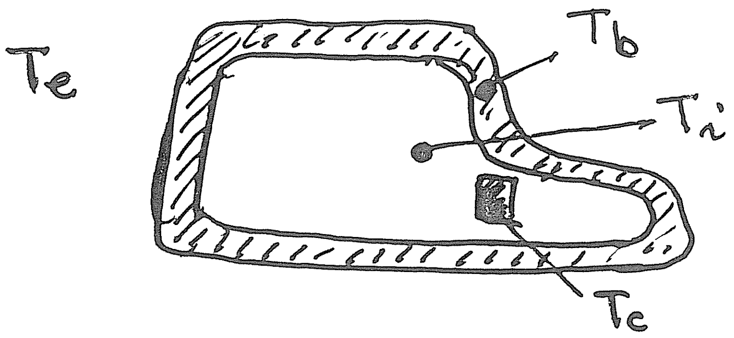


Modello half-car

Auto con sospensioni controllate



ESEMPIO: CONDIZIONAMENTO TERMICO VEICOLO



- per intervallo di tempo Δt "sufficient." piccolo

$\Downarrow$

$$c_i m_i \left[T_i((j+1)\Delta t) - T_i(j\Delta t)\right] = k_{ci}\left[T_c(j\Delta t) - T_i(j\Delta t)\right]^m$$
$$- k_{ib}\left[T_i(j\Delta t) - T_b(j\Delta t)\right]$$

$$c_b m_b \left[T_b((j+1)\Delta t) - T_b(j\Delta t)\right] = k_{ib}\left[T_i(j\Delta t) - T_b(j\Delta t)\right]$$
$$- k_{be}\left[T_b(j\Delta t) - T_e(j\Delta t)\right]$$

c_* = capacità termica del corpo $*$

m_* = massa del corpo $*$

$k_{*\oplus}$ = conduttività termica tra corpi $* \leftrightarrow \oplus$

- Se si misura temperatura interna T_i:

$$y(j\Delta t) = T_i(j\Delta t)$$

ESEMPIO: CONDIZIONAMENTO TERMICO

- Se C_*, $K_{*\circ}$ sono funzioni delle temperature dei corpi e $m \neq 1$

$\Downarrow$

equazioni <u>ingresso-stato-uscita nonlineari</u>

$$x(j+1) = f(x(j),\ u(j))$$

stati $\rightarrow [T_i(j\Delta t), T_b(j\Delta t)]^T$ $\qquad$ $[I_{\xi}(j\Delta t), T_e(j\Delta t)]^T$

ingresso $\qquad$ disturbo

$$y(j) = \eta(x(j),\ u(j))$$

- Se C_*, $K_{*\circ}$ sono costanti e $m = 1$

$\Downarrow$

$$x(j+1) = F\,x(j) + G\,u(j)$$

$$y(j) = H\,x(j) + D\,u(j)$$

$\Uparrow$

sistema "a tempo discreto" lineare

ESEMPIO: CONDIZIONAMENTO TERMICO

$$F = \begin{bmatrix} \dfrac{1 - k_{ci} - k_{ib}}{c_i m_i} & \dfrac{k_{ib}}{c_i m_i} \\[2em] \dfrac{k_{ib}}{c_b m_b} & \dfrac{1 - k_{ib} - k_{be}}{c_b m_b} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{k_{ci}}{c_i m_i} & 0 \\[2em] 0 & \dfrac{k_{be}}{c_b m_b} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trasformata di Laplace

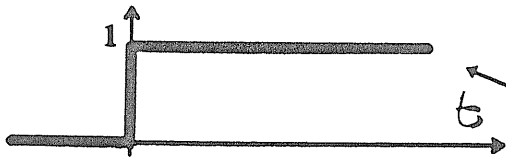
$$\begin{array}{ccc} f(t) & \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} & F(s) \\ \uparrow & & \uparrow \\ R \rightarrow R & & C \rightarrow C \end{array}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

- $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$: **operatori lineari**

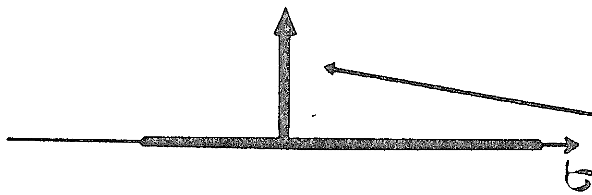
- $\mathcal{L}\left[\dfrac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$

- $\mathcal{L}[U(t)] = \dfrac{1}{s}$



U(t) : gradino

- $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$



$\delta\ (t)$: *impulso*

- $\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \dfrac{1}{s-a}$

Matrice di trasferimento

$$\frac{dx}{dt}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad\qquad y(t) = Hx(t)$$

$$\downarrow \mathcal{L} \qquad\qquad \downarrow \mathcal{L}$$

$$sX(s) - x(0) = FX(s) + GU(s) \qquad\qquad Y(s) = HX(s)$$

$$\Downarrow$$

$$(sI - F)X(s) = x(0) + GU(s),$$

$$\Downarrow \quad \textit{se}\ \det(sI - F) \neq 0$$

$$X(s) = (sI - F)^{-1}x(0) + (sI - F)^{-1}GU(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Y(s) = H(sI - F)^{-1}x(0) + H(sI - F)^{-1}G\,U(s)}$$

- $M(s) = H(sI - F)^{-1}G$: matrice di trasferimento

- **Caso SISO** $(p=1, q=1)$

$$M(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{\underbrace{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}_{\det(sI - F) = p_c(s)}}$$

$$\Updownarrow$$

$$M(s) = k \frac{\prod_j^{n-1} (s - z_j)}{\prod_i^{n} (s - p_i)}$$

p_i: zeri di $p_c(s)$

- Se $p_i \neq z_j, \ \forall i, j \ \Rightarrow$ p_i: *polo di M(s)*

  z_j: *zero di M(s)*

SISTEMI DINAMICI

Propri

$$y(t) = \eta\ (t, x(t))$$

Non propri

$$y(t) = \eta\ (t, x(t), u(t))$$

$\downarrow$ *sistemi lineari invarianti*

$$y(t) = H\, x(t) + D\, u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$M(s) = H(sI - F)^{-1} G + D$$

$\downarrow$ *caso SISO*

$$M(s) = \frac{Ds^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

Trasformata Zeta

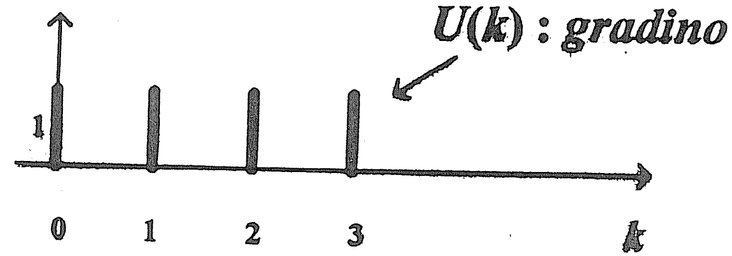
$$
\begin{array}{ccc}
f(k) & \overset{\mathcal{Z}}{\underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\rightleftarrows}} & F(z) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\text{interi} \rightarrow R & & C \rightarrow C
\end{array}
$$

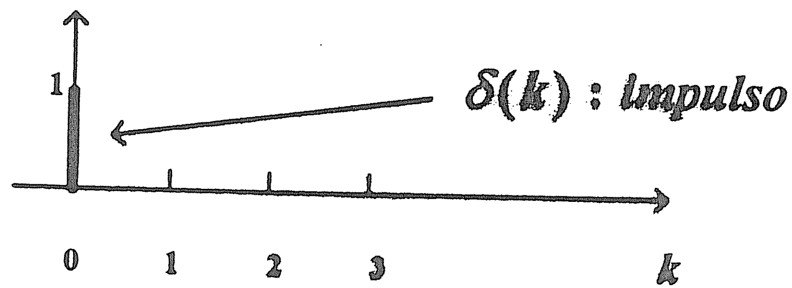
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k}$$

- $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^{-1}$: **operatori lineari**

- $\mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - z f(0)$

- $\mathcal{Z}[U(k)] = \dfrac{z}{z-1}$

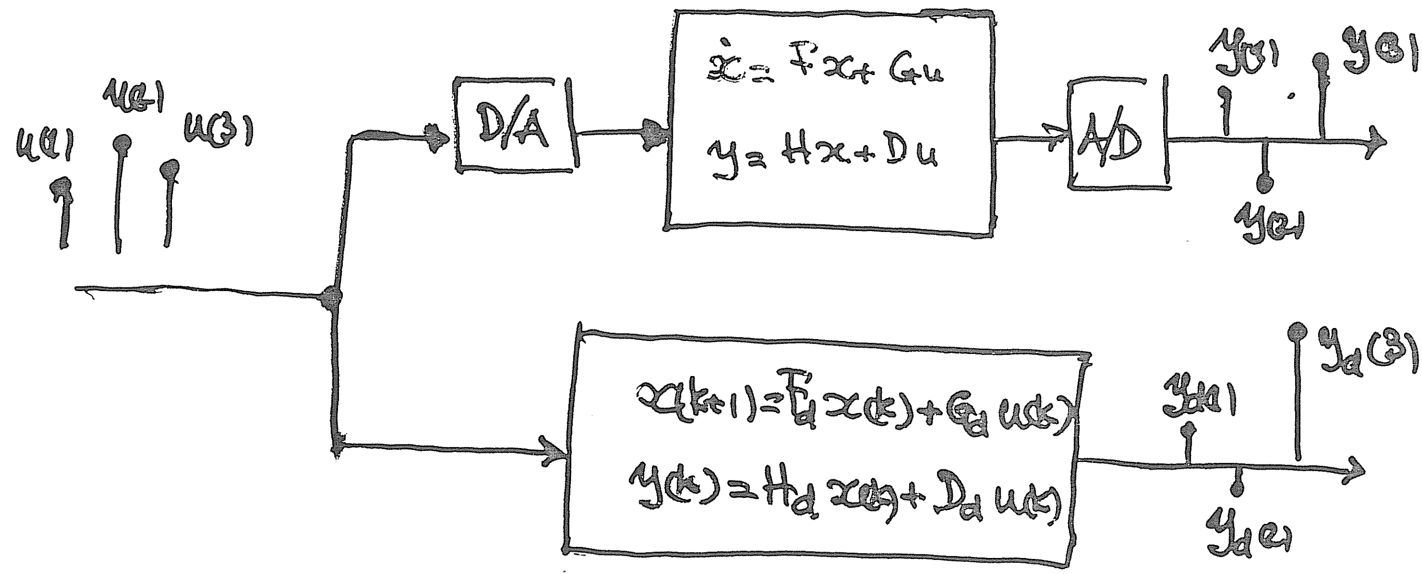




- $\mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$

- $\mathcal{Z}[a^k] = \dfrac{z}{z-a}$

SISTEMI CONTINUI $\rightleftarrows$ **SISTEMI DISCRETI**



Dati F, G, H, D
trovare F_d, G_d, H_d, D_d
in modo che

Dati F_d, G_d, H_d, D_d
trovare F, G, H, D
in modo che

$$y_d(j) \cong y(j) \qquad j = 1, 2, \ldots$$

Date $M(s)$
trovare $M_d(z)$
tale che

Date $M_d(z)$
trovare $M(s)$
tale che

SISTEMI CONTINUI $\longrightarrow$ **SISTEMI DISCRETI**

SISTEMI CONTINUI $\longleftarrow$ **SISTEMI DISCRETI**

- Trasformazione bilineare:

$$M(s) \xrightarrow{\;s = \frac{z-1}{\Delta t(\alpha z + 1 - \alpha)}\;} M_d(z) \qquad \boxed{0 \leq \alpha \leq 1}$$

$$M(s) \xleftarrow{\;z = \frac{1 - \alpha \Delta t s + \Delta t s}{1 - \alpha \Delta t s}\;} M_d(z)$$

- $\alpha = 0 \Rightarrow$ metodo di Eulero esplicito

$$\Downarrow$$

$$F_d = (I + F\Delta t) \qquad H_d = H$$

$$G_d = G\Delta t \qquad D_d = D$$

- $\alpha = 0{,}5 \Rightarrow$ metodo di Tustin

- $\alpha = 1 \Rightarrow$ metodo di Eulero implicito

PARAMETRIZZAZIONE "BLACK-BOX" DI SISTEMI DISCRETI LTI

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{D z^{n} + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^{n} + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$z^{n} Y(z) + a_1 z^{n-1} Y(z) + \dots + a_n Y(z) = D z^{n} U(z) + \dots + b_n U(z)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = -a_1 z^{-1} Y(z) - \dots - a_n z^{-n} Y(z) + D U(z) + \dots + b_n z^{-n} U(z)$$

$$\Downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(j) = -a_1 y(j-1) - \dots - a_n y(j-n) + D u(j) + \dots + b_n u(j-n)$$

$$\Uparrow$$

parametrizzazione ARX

$$\Downarrow$$

parametri da identificare:

$$[a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_n \quad D]$$

PARAMETRIZZAZIONE "BLACK-BOX" DI SISTEMI DISCRETI LTI

$$Y(z) = M(z)\, U(z)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{Z}^{-1}$$

$$y(j) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k\, u(j-k) = h * u$$

$\uparrow$

parametrizzazione IIR

$\Downarrow$

parametri da identificare:

$[h_0 \ h_1 \ \dots \ h_\infty]$

- $h_k \Rightarrow$ risposta all'impulso unitario
- se $|p_i| < 1 \ \forall i \leftarrow$ poli di $M(z)$

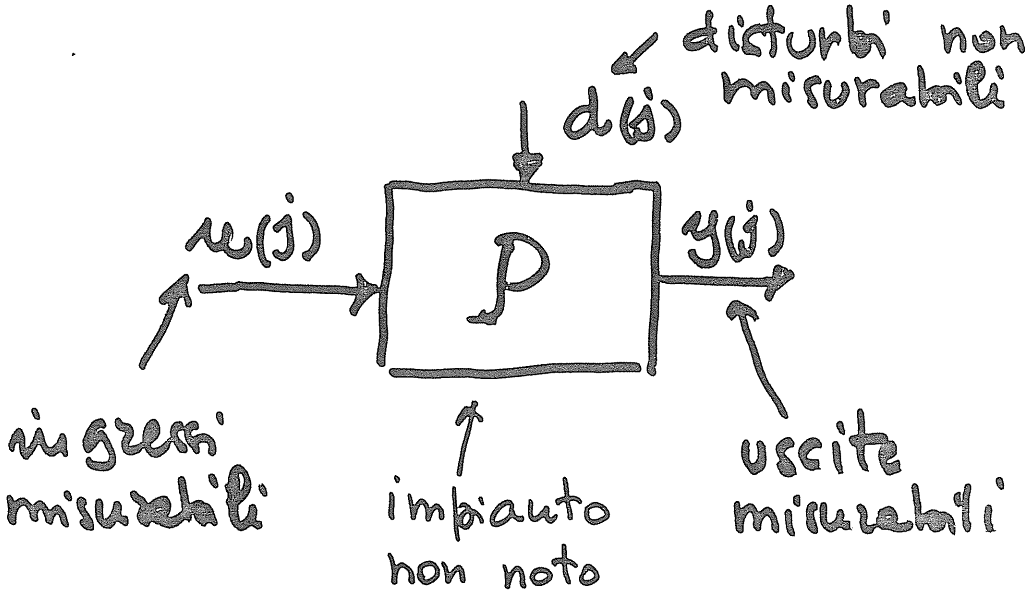
$\Downarrow$

$$\lim_{k \to \infty} |h_k| = 0 \Rightarrow \exists n : h_k \cong 0 \quad k \geq n$$

parametrizzazione FIR(n):

$[h_0 \ h_1 \ \dots \ h_{n-1}]$

IDENTIFICAZIONE DI SISTEMI LTI DISCRETI



$$y(j) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^P \, u(j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h_k^D \, d(j-k)$$

modello dello impianto

$\Downarrow$ Z-trasformata

modello del disturbo

$$Y(z) = H^P(z)\, U(z) + H^D(z)\, D(z)$$

$\Downarrow$ Z^{-1}

$$y = h^P * u + h^D * d$$

IDENTIFICAZIONE DI SISTEMI LTI

- Si suppone di applicare un ingresso $u(j)$ noto e di misurare le uscite

$$y^N = [y(0), \ldots , y(N-1)]$$

<u>Problemi</u>:
- stimare $h^P \cong \hat{h} = \phi(y^N)$
- valutare $E(\hat{h}) = \| h^P - \hat{h} \|$

- Come si fa a trovare $\hat{h}$ in modo che $E(\hat{h})$ sia il più piccolo possibile?

- Solo con questi dati non si può <u>neanche garantire che $E(\hat{h})$ sia finito</u>

- Occorre avere ulteriori informazioni su:
  - modello dell'impianto
  - modello del disturbo

MISURA DELL'ERRORE DI IDENTIFICAZIONE

- Valutare l'errore è <u>fondamentale</u>

  ⇓

  un modello è senza valore
  se non si è in grado di valutare
  gli <u>effetti della sua incertezza</u>

- Se lo scopo dell'identificazione è valutare dei parametri fisici, <u>occorre</u> darne, oltre al valore stimato, gli <u>intervalli di incertezza</u> (UI)

- In questo caso $E(\hat{h})$ è espresso in termini dell'ampiezza degli UI

MISURA DELL'ERRORE DI IDENTIFICAZIONE

- Se l'obiettivo è il controllo, il modello $\hat{h}$ e l'errore $E(\hat{h})$ devono individuare un <u>insieme di modelli</u> $M(\hat{h}, E(\hat{h}))$ tale che:

$$P \in M(\hat{h}, E(\hat{h})) \leftarrow \text{modello di incertezza}$$

- Il modello di incertezza deve essere nella forma opportuna per utilizzare le moderne metodologie di <u>progetto robusto</u>

- In questo caso $E(\hat{h})$ può essere definito in termini di norma l_1 o H_∞

IDENTIFICAZIONE CLASSICA

$\mathcal{P}$: modello parametrico

$\Downarrow$

$$h^P = h^M(\vartheta^\circ)$$

parametri "veri" non noti $\in R^n$

$e(t)$: sequenza aleatoria

$E(e) = 0$ — valore medio

Σ_e nota — covarianza

$\Downarrow$ Problema di stima parametrica

parametri non noti

$$y^N = F(\vartheta^\circ) + e^N$$

dati noti — funzione nota — media e covarianza noti

<u>Problema</u>: stimare $\vartheta^\circ \cong \hat{\vartheta} = \phi(y^N)$

MODELLI FIR(n)

$$y(j) = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \, u(j-k) + e(j) \quad j = 0, 1, \dots, N$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = [\, h_0 \quad h_1 \quad \dots \quad h_{n-1} \,]^T$$

$$y^N = [\, y(n) \quad y(n+1) \dots \quad y(N) \,]^T$$

$$\Downarrow$$

$$y^N = L\vartheta + e$$

$$L = \begin{vmatrix} u(n) & u(n-1) & \cdot & \circ & u(\cancel{-n+1})^{\,0} \\ u(n+1) & u(0) & \vdots & \vdots & u(\cancel{-n+2})^{\,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N) & u(N-1) & \vdots & \vdots & u(N-n+1) \end{vmatrix}$$

MODELLI ARX (p, q)

$$y(j) = \sum_{i=1}^{p} a_i \, y(j-i) + \sum_{i=1}^{q} b_i \, u(j-i) + e(j) \qquad j = 0, \dots N$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p & b_1 & b_2 & \cdots & b_q \end{bmatrix}^T$$

$$y^N = \begin{bmatrix} y(p+1) & y(p+2) & \cdots & y(N) \end{bmatrix}^T$$

$$\Downarrow$$

$$y^N = L \vartheta + e$$

$$L = \begin{vmatrix} y(p) & \cdots & y(1) & u(p) & \cdots & u(p+1-q) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-1) & \cdots & y(N-p) & u(N-1) & \cdots & u(N-q) \end{vmatrix}$$

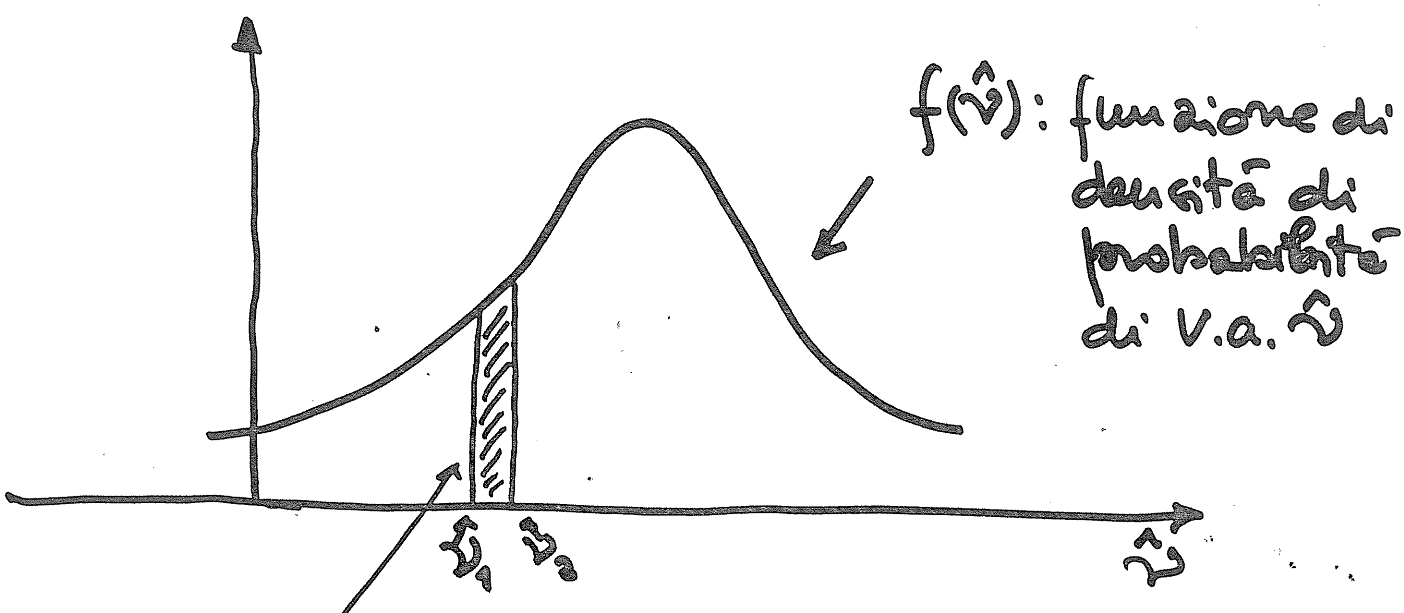
PROPRIETÀ DELLE STIME STATISTICHE

- Se e^N è una V.a.

$$\Downarrow$$

$$\hat{\vartheta} = \phi\left(F(\vartheta^\circ) + e^N\right) \leftarrow \text{V.a.}$$

Come si misura la "bontà" di $\hat{\vartheta}$?



questa area $= P_{rob}(\vartheta_1 \leq \hat{\vartheta} \leq \vartheta_2)$

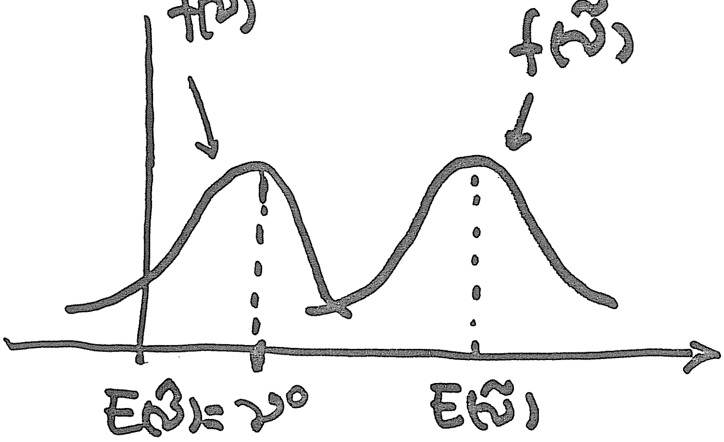
PROPRIETÀ DELLE STIME STATISTICHE

• Correttezza (Non polarizzazione)

$E(\hat{\vartheta}) = \vartheta^0$

valore medio

$\Rightarrow$

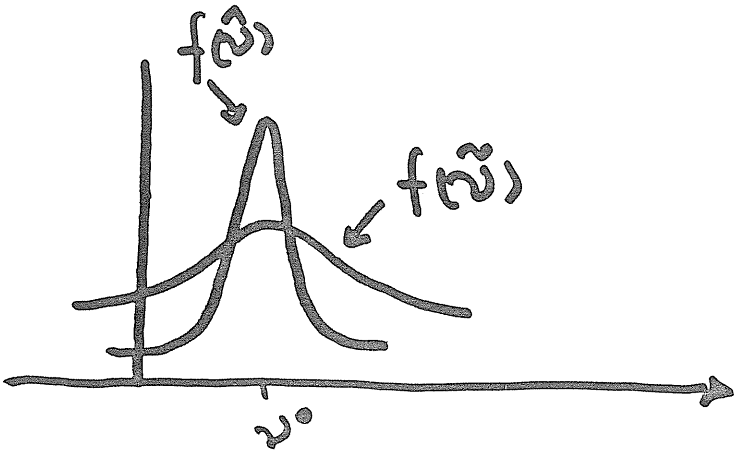


• Efficienza

$\Sigma_{\hat{\vartheta}} \leq \Sigma_{\tilde{\vartheta}}$

$\forall \tilde{\vartheta}$ corretta

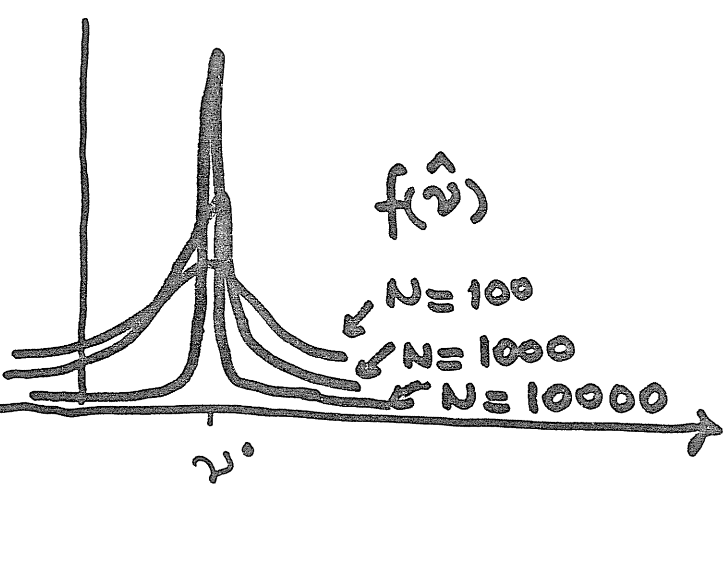
$\Rightarrow$



• Consistenza

$\lim_{N \to \infty} \Sigma_{\hat{\vartheta}} = 0$

$\Rightarrow$



STIMA DI MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

- Si riesce a trovare stimatori corretti, efficienti, consistenti?

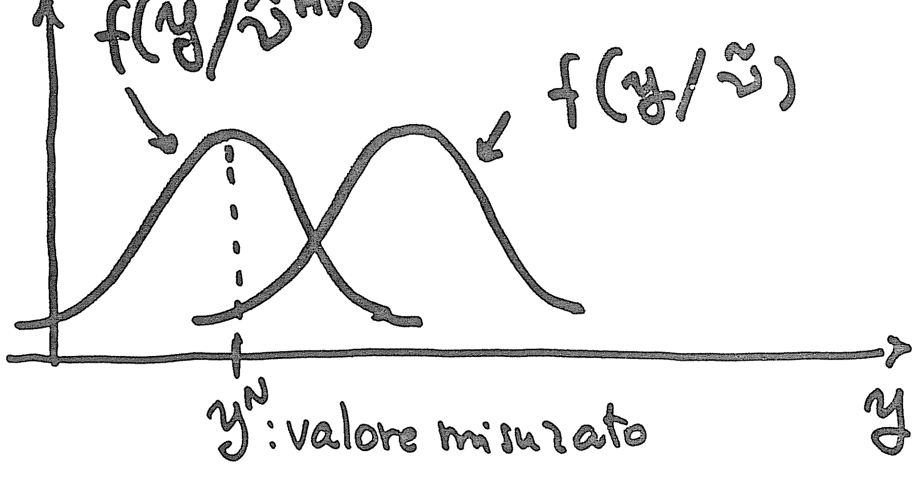
- $f(y^N/\vartheta)$: f.d.p dei dati, se fossero generati da $h^M(\vartheta)$

- Stima di Massima Verosimiglianza:

$$\hat{\vartheta}^{MV} = \arg\max_{\vartheta} f(y^N/\vartheta)$$

$\uparrow$

parametri per cui i dati misurati sono i più probabili



$f(y/\vartheta)$: funzione di verosimiglianza

STIMA M.V.

- Come si calcola $\hat{\vartheta}^{MV}$?

Caso di errori gaussiani

$\Downarrow$

$$f(e^N) = \mathcal{N}(0, \Sigma_e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi |\Sigma_e|}} \exp^{-\frac{1}{2\omega} e^T \Sigma_e^{-1} e}$$

$$y^N = F(\vartheta) + e^N$$

$\Downarrow$

$$f(y/\vartheta) = \mathcal{N}\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{media}}}{F(\vartheta)},\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{covarianza}}}{[y^N - F(\vartheta)]^T \Sigma_e^{-1} [y^N - F(\vartheta)]}\Big)$$

STIMA M.V.

- Poiché $f(y^N/\vartheta)$ è esponenziale in ϑ

$$\Downarrow$$

$$\hat{\vartheta}^{MV} = \arg\max_{\vartheta} f(y^N/\vartheta) =$$

$$= \arg\min_{\vartheta} \Big\{ \underbrace{\frac{1}{N}\left[y^N - F(\vartheta)\right]^T \Sigma_e^{-1} \left[y^N - F(\vartheta)\right]}_{R(\vartheta)} \Big\}$$

- Nel caso di errori gaussiani la stima MV è la <u>stima dei minimi quadrati pesati</u> con la covarianza degli errori

<u>Attenzione</u>: bisogna trovare il <u>minimo globale</u> di $R(\vartheta)$ che può avere <u>minimi locali</u>.
Gli usuali algoritmi di ottimizzazione non lineare non garantiscono di arrivare al minimo globale

PROPRIETÀ DELLE STIME M.V.

$\hat{\vartheta}^{MV}$ è una stima:

- asintoticamente corretta
- asintoticamente efficiente
- consistente
- asintoticamente gaussiana

STIMA DI GAUSS-MARKOV

- Risultati più completi si ottengono se $F(\vartheta)$ è lineare:

$$y^N = L\vartheta + e^N$$

- In questo $R(\vartheta)$ è quadratica

$\Downarrow$

esiste un solo minimo

$\Downarrow$

$$\hat{\vartheta}^{MV} = \left(L^T \Sigma_e^{-1} L\right)^{-1} L^T \Sigma_e^{-1} y^N$$

$\uparrow$

stima di Gauss-Markov $\rightarrow \hat{\vartheta}^{GM}$

PROPRIETA' DELLA STIMA G.M.

$\hat{\vartheta}^{GM}$ è una stima:

- corretta
- efficiente
- consistente
- gaussiana

<u>Nota</u>:
- $\hat{\vartheta}^{GM}$ è la stima a minima varianza tra stimatori corretti. Esistono stimatori polarizzati che hanno varianza minore
- Se e^N non è gaussiano $\hat{\vartheta}^{GM}$ è la stima a minima varianza tra stimatori corretti e lineari

STIMA DI MODELLI ARX

- Caso di rumore IID gaussiano di <u>varianza non nota</u>

$$\Downarrow$$

$$\Sigma_e = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non noto}}}{\sigma_e^2} I$$

- I parametri da stimare sono ϑ, σ_e e si considera la funzione di verosimiglianza $f(y^N / \vartheta, \sigma_e)$

$$-\ln f(y^N / \vartheta, \sigma_e) =$$

$$= \frac{1}{2N\sigma_e^2}(y^N - L\vartheta)^T(y - L\vartheta) + \frac{1}{2}\ln \sigma_e^2 + \frac{1}{2}\ln 2\pi$$

STIMA DI MODELLI ARX

$$\arg\max_{\vartheta, \sigma_e} f(y^N/\vartheta, \sigma_e) = \arg\min_{\vartheta, \sigma_e} -\ln f(y^N/\vartheta, \sigma_e)$$

$$\Downarrow$$

$$(\hat{\sigma}_e^2)^{MV} = R(\vartheta) = \frac{1}{N}(y - L\vartheta)^T(y - L\vartheta)$$

$$\Downarrow$$

$$-\ln f(y^N/\vartheta, \hat{\sigma}_e^{MV}) = \frac{1}{2}\ln R(\vartheta) + \frac{1}{2}(1 + \ln 2\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\vartheta}^{MV} = \arg\min_{\vartheta} R(\vartheta) = (L^T L)^{-1} L^T y$$

ERRORI DI STIMA

- Tra gli stimatori corretti, la "bontà" di una stima può essere misurata dalla covarianza $\Sigma_{\hat{\vartheta}}$

- Caso lineare

$$\Downarrow$$

$$\Sigma_{\hat{\vartheta}_{GM}} = \left(L^T \Sigma_e^{-1} L\right)^{-1} \leq \Sigma_{\tilde{\vartheta}} \qquad \forall \tilde{\vartheta} \text{ corretto}$$

- Nel caso non lineare si sa solo dare un <u>limite inferiore</u> a $\Sigma_{\hat{\vartheta}_{MV}}$:

$$\Sigma_{CR} = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta^\circ}^T \Sigma_e^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta^\circ}\right]^{-1} \leq \Sigma_{\hat{\vartheta}_{MV}}$$

$$\lim_{N \to \infty} \Sigma_{\hat{\vartheta}_{MV}} = \Sigma_{CR}$$

- In pratica, per Σ_{CR} si usa $\hat{\vartheta}^{MV}$ al posto di ϑ°, che non è noto.

SCELTA DELL'INGRESSO

- La "bontà" delle stime dipende, a parità delle altre condizioni, dall'ingresso usato per le misure

- Se è possibile sceglierlo, si potrebbe cercare quello che minimizza $\Sigma_{\hat{\upsilon}}$

  $\Downarrow$

  in generale difficile da trovare

- In generale, si dovrebbero usare ingressi persistentemente eccitanti (ad es. sequenze PRBS)

- In ogni caso, l'ingresso dovrebbe avere contenuti frequenziali in tutta la banda in cui si vuole avere una buona approssimazione tra sistema e modello identificato

VALIDAZIONE DEL MODELLO

- Il problema di valutare la validità di un modello è mal posto

- Si può solo concludere sulla non validità, se il modello non è in grado di spiegare neanche i dati passati

- Impostazione del problema radicalmente diversa

$\Downarrow$

- Si considerano più modelli via via più complessi

- Si sceglie il modello con la maggiore capacità predittiva

$\Uparrow$

capacità di simulare correttamente il comportamento del sistema per dati non usati per la identificazione

SCELTA FRA CLASSI DI MODELLI

- Per comparare la "bontà" di classi di modelli diversa struttura non si può usare l'errore residuo $R(\hat{\vartheta})$

- Ad esempio usando ARX(0, N)

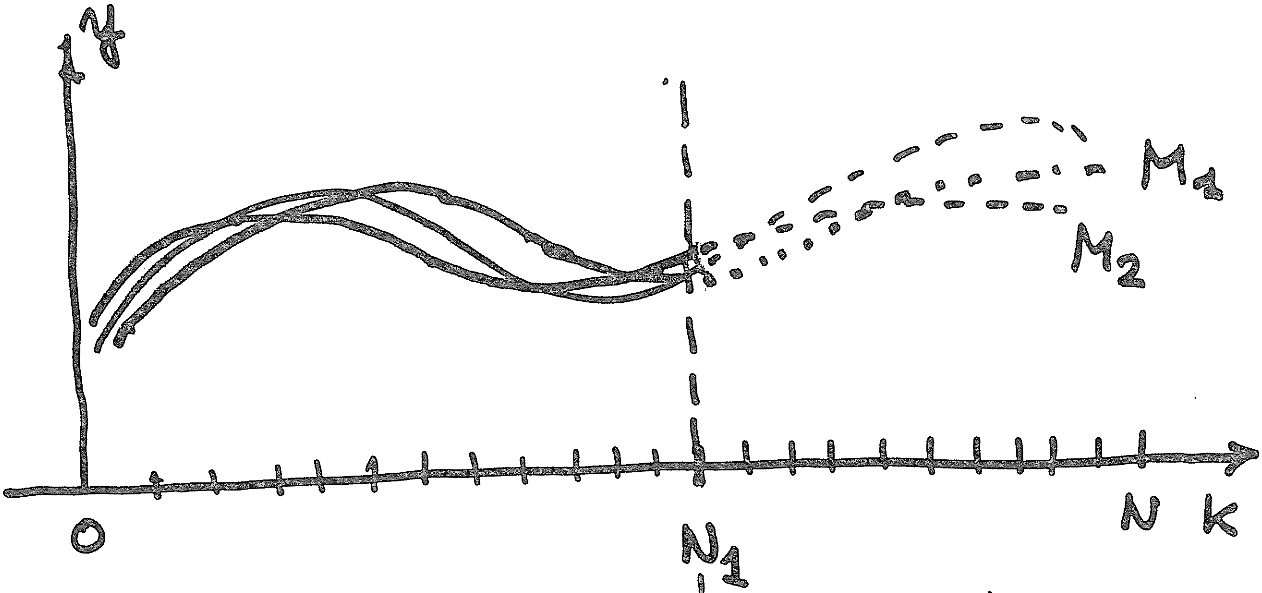
$$\text{ARX}(0,N) \Downarrow R(\hat{\vartheta}) = 0$$

ARX(0, N) può invece avere una capacità predittiva molto bassa

- Come si può valutare la capacità predittiva di un modello?

SCELTA FRA CLASSI DI MODELLI

Soluzione elementare $\Rightarrow$ metodo della partizione dei dati



Dati usati per l'identificazione

Dati usati per valutare errore di predizione

- I dati disponibili sono usati in maniera poco efficiente

SCELTA FRA CLASSI DI MODELLI

Sono stati proposti diversi metodi di stima dell'errore di predizione che non richiedono la partizione dei dati.
Da questi metodi si ottengono degli <u>indici</u> per ordinare le classi di modelli

- $FPE = R(\hat{\vartheta}) \dfrac{N+n}{N-n}$ ← Akaike 1969

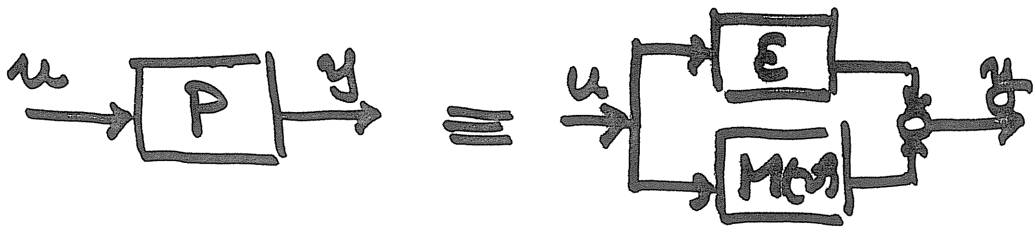
- $AIC = \ln R(\hat{\vartheta}) + \dfrac{2n}{N}$ ← Akaike 1974

- $BIC = \ln R(\hat{\vartheta}) + \dfrac{n \ln N}{N}$ ← Schwarz 1974

ERRORI DI MODELLO

- In realtà qualunque modello sarà sempre una rappresetazione approssimata dell'impianto $\Rightarrow h^{\varepsilon} = h^{P} - h^{M}(\nu^{\circ}) \neq 0$

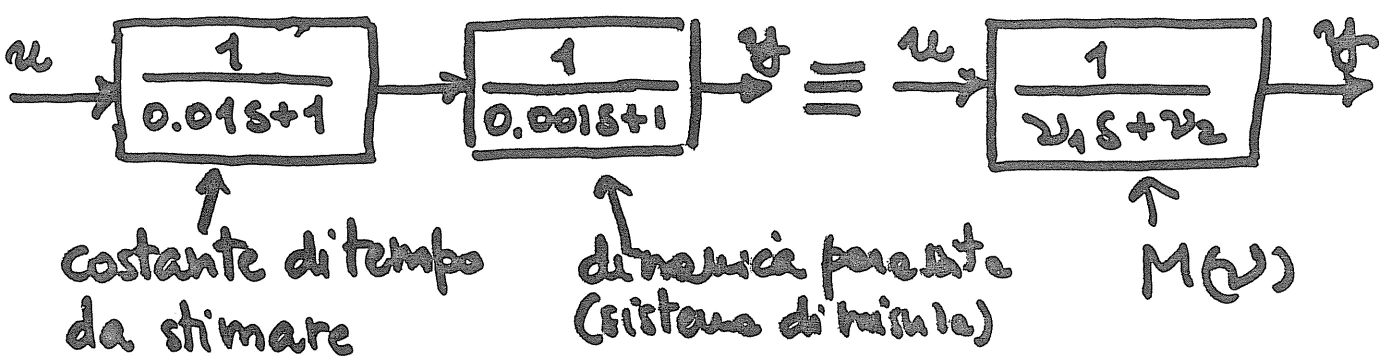
$\uparrow$ dinamiche trascurate (parassite)



$$y = h^{M}(\nu^{\circ}) * u + \underbrace{h^{\varepsilon} * u + h^{D} * d}_{e:\ \text{non più v.a.}}$$

ERRORI DI MODELLO

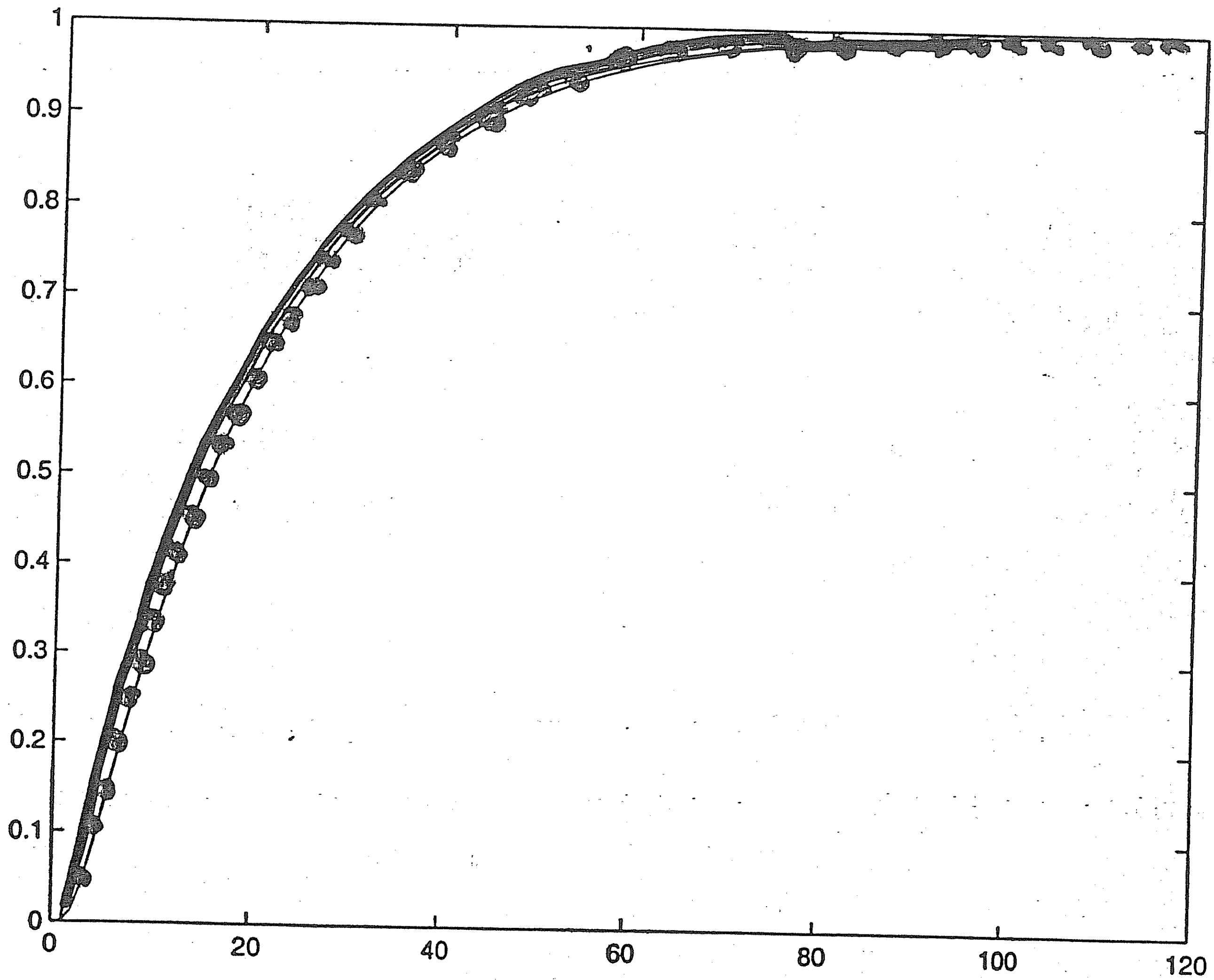
- Se interessa stimare ϑ°, la presenza di dinamiche parassite, anche se piccole, può portare a forti polarizzazioni nelle stime M.V.



$$\lim_{N\to\infty} \frac{\hat{\vartheta}_1}{\hat{\vartheta}_2} = 0.013$$

$$\Downarrow$$

la costante di tempo è stimata col 30% di errore anche facendo grande numero di misure

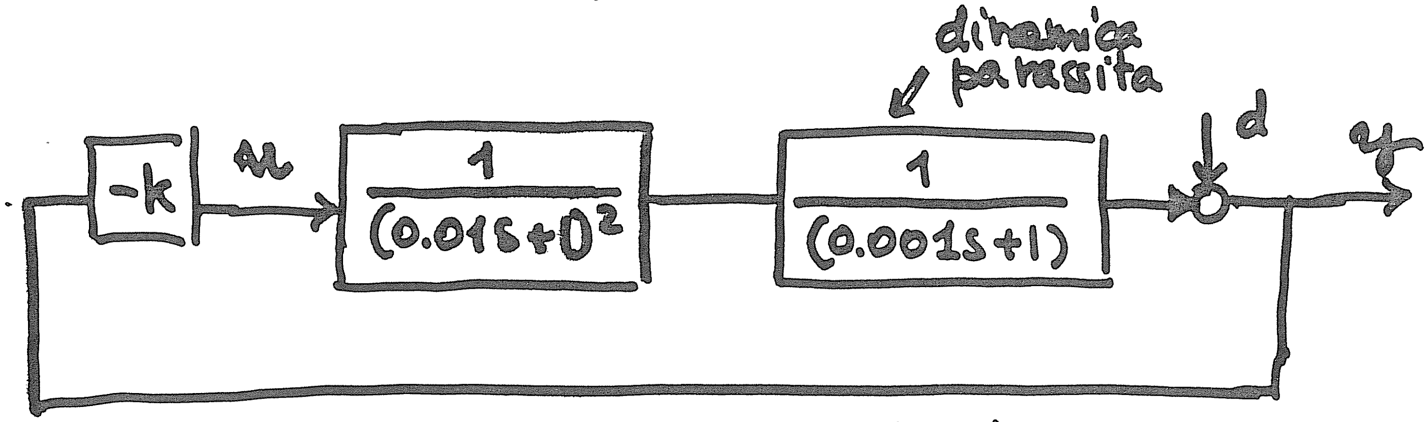


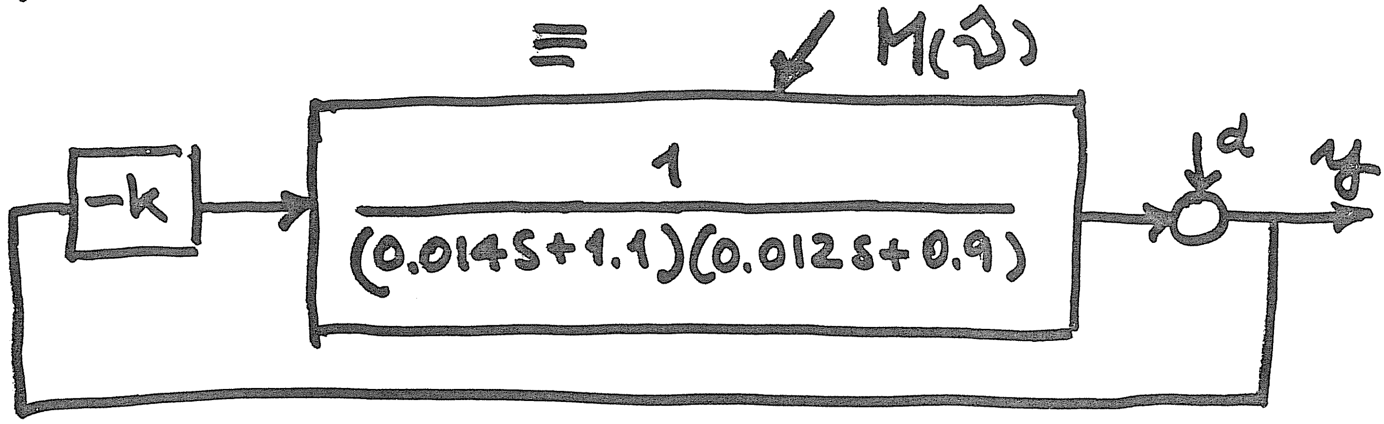
— Modello

••• Dati misurati

ERRORI DI MODELLO

- Problemi ancora maggiori possono nascere se si usa il modello identificato per il controllo





- Col modello stimato si prevede che l'anello chiuso è <u>stabile</u> con <u>K comunque grande</u>

- Sul sistema vero <u>non è così</u>

IDENTIFICAZIONE SET MEMBERSHIP

$$y = h^M(\vartheta^\circ) * u + \underbrace{h^E * u + h^D * d}_{e}$$

- Per la presenza degli errori di modello, l'errore e non può essere descritto come variabile aleatoria
- Si può considerare che e sia limitato

$$\Downarrow$$

$$\|e\| \leq E$$

Problemi

Stima parametrica

- Stimare $\hat{\vartheta}$ tale che:

$$\min_{\vartheta} \|\vartheta^\circ - \vartheta\|$$

- Valutare questo errore

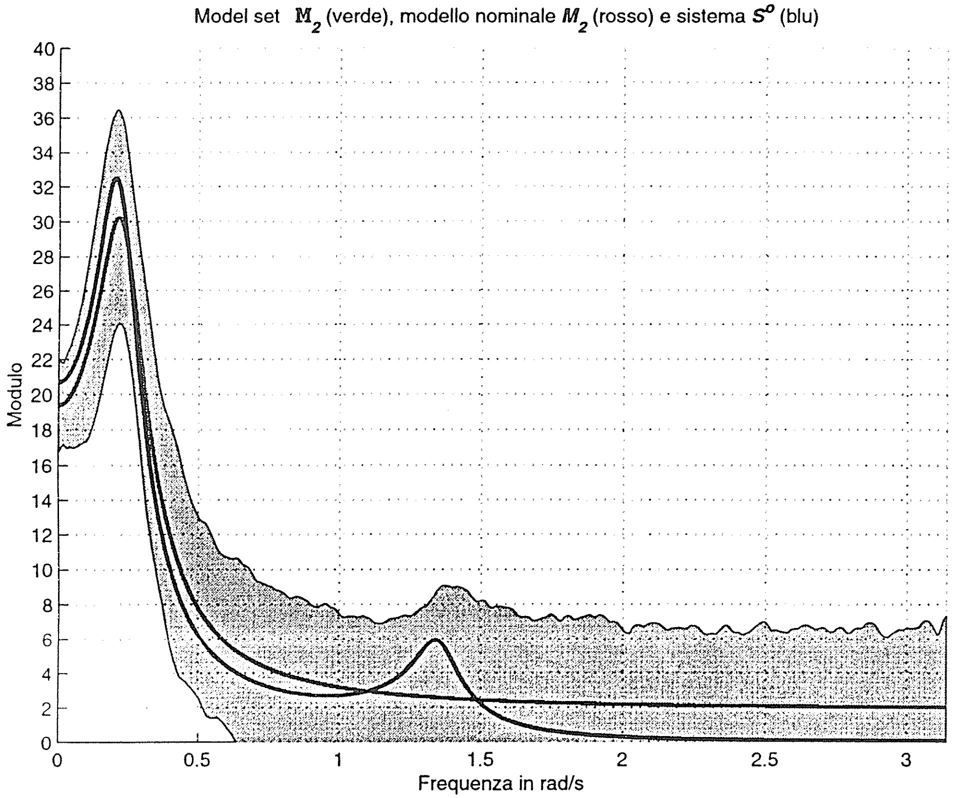
Identificazione H_∞

- Stimare $\hat{\vartheta}$ tale che

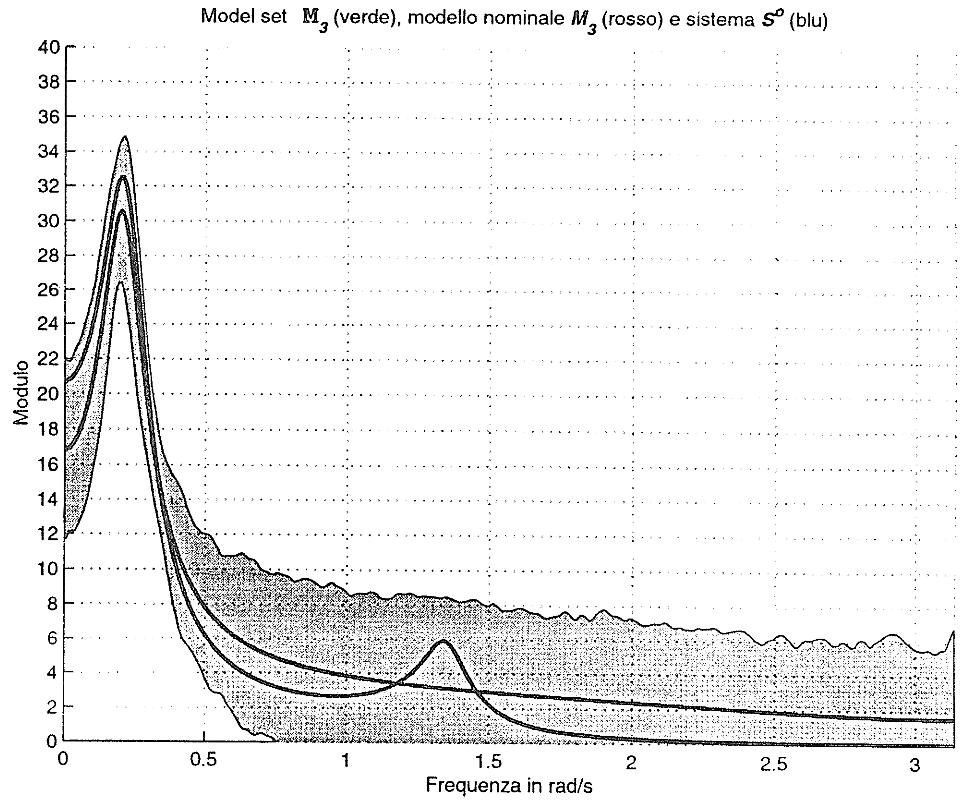
$$\min_{\vartheta} \|H^P(z) - H^M(z, \vartheta)\|_\infty$$

- Valutare questo errore

2) approssimazioni di $\hat{M}^{no}_{150}$ di ordine $2 \div 5$ ($\hat{M}_2 \div \hat{M}_5$) ottenute con i metodi di riduzione del modello disponibili in MATLAB (approssimazioni ottime della norma di Hankel, troncamento bilanciato)

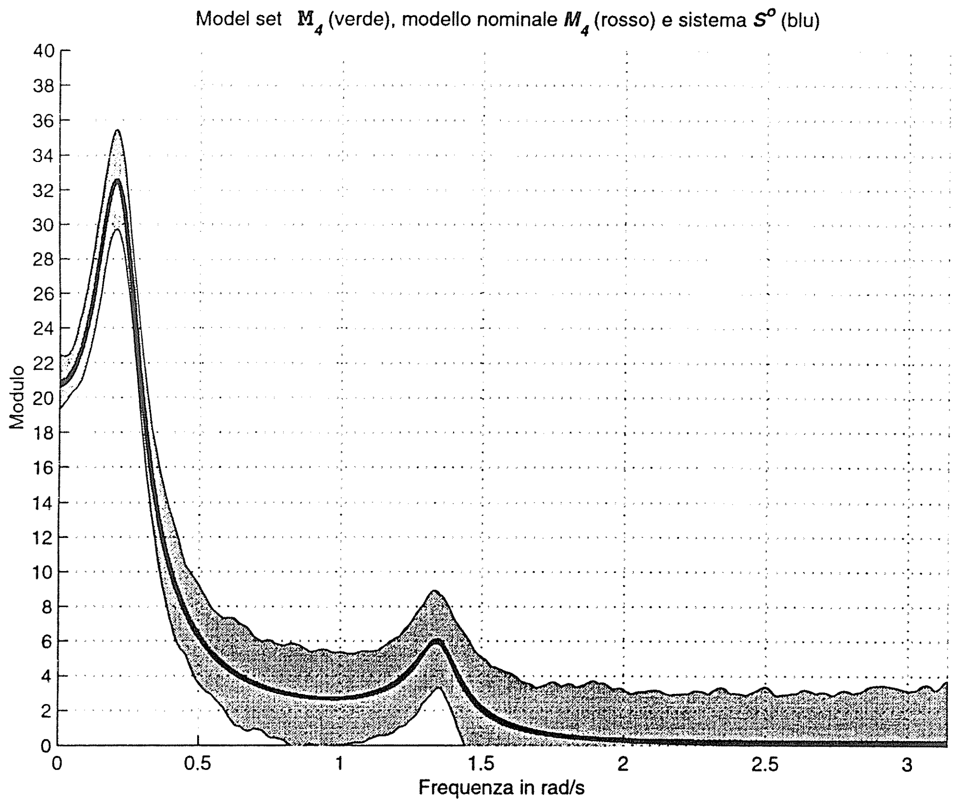


model set $\hat{\mathcal{M}}_2$

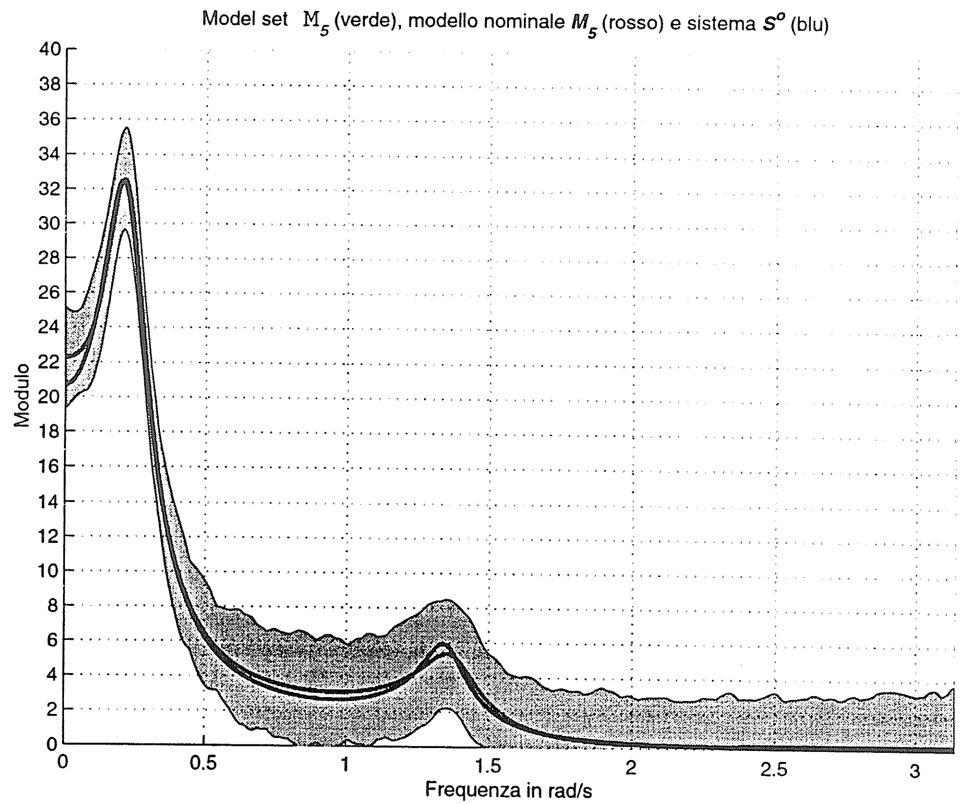


model set $\hat{\mathcal{M}}_3$

2) approssimazioni di $\hat{M}^{no}_{150}$ di ordine $2 \div 5$ ($\hat{M}_2 \div \hat{M}_5$) ottenute con i metodi di riduzione del modello disponibili in MATLAB (approssimazioni ottime della norma di Hankel, troncamento bilanciato)



model set $\hat{\mathcal{M}}_4$



model set $\hat{\mathcal{M}}_5$

IDENTIFICAZIONE DI SISTEMI DISCRETI NONLINEARI TEMPO INVARIANTI NLTI

- Un sistema discreto NLTI può essere descritto da regressione non lineare:

$$y(j+1) = f^{\circ}(\underbrace{y(j), \ldots, y(j-p), u(j), \ldots u(j-q)}_{w(j)})$$

- Problema: stimare la funzione non nota $f^{\circ}(w)$ a partire da misure di y e u

- Come nel caso lineare, se si può dare rappresentazione parametrica:

$$f^{\circ}(w) = f(w, \nu^{\circ})$$

parametri non noti $\in \mathbb{R}^n$

$\Downarrow$ Problema di stima parametrica

$$y^N = F(\nu^{\circ}) + e^N$$

dati misurati

Funzione nota

errore tra dati misurati e dati generati dal modello

IDENTIFICAZIONE DI SISTEMI NLTI

- Se $f(e^N) = \mathcal{N}(0, \Sigma_e) \leftarrow$ f.d.p. gaussiana

$\Downarrow$ stima di massima verosimiglianza

$$\hat{\vartheta}^{MV} = \arg\min_{\vartheta} \Big\{ \underbrace{\frac{1}{N} [y^N - F(\vartheta)]^T \Sigma_e^{-1} [y^N - F(\vartheta)]}_{R(\vartheta)} \Big\}$$

$R(\vartheta)$: scarti quadratici medi pesati con le precisione delle misure

- In generale $R(\vartheta)$ <u>non è convessa</u>

$\Downarrow$

gli algoritmi numerici di minimizzazione possono arrestarsi su <u>minimi locali</u>

IDENTIFICAZIONE DI SISTEMI NLTI

- Se possibile, si utilizzano <u>leggi fisiche</u> per ottenere la rappresentazione parametrica $f(w, u)$

- Quando le leggi fisiche sono troppo complesse o non ben note si possono usare <u>parametrizzazioni black-box</u>

parametrizzazioni "a base fissa"

NARX polinomiali
trigonometrici
- - - - -

parametrizzazioni "a base variabile"

NN sigmoidali
gaussiane
- - - -

PARAMETRIZZAZIONE "A BASE FISSA"

$$f(w, \nu) = \sum_{i=1}^{\eta} c_i \, \sigma_i(w)$$

$$\uparrow$$

$$\nu = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_\eta]^T$$

$\sigma_i(w)$: "funzioni di base" assegnate

- É possibile scegliere σ_i tale che:

$$f(w, \nu) \xrightarrow[\eta \to \infty]{} f(w) \quad ?$$

- Se $f(w)$ è continua, $\mathbb{R}^n \supset W$ limitato e $\sigma_i(w)$ polinomio di grado i

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\eta \to \infty} \sup_{w \in W} | f(w, \nu) - f(w) | = 0$$

$$\Downarrow$$

modelli NARX polinomiali

PARAMETRIZZAZIONE "A BASE FISSA"

- La stima di ν diventa un problema di stima lineare:

$\Downarrow$ misure

$$\underset{\text{misurato}}{y(j+1)} = \sum_{i=1}^{\eta} c_i \sigma_i \big(\underset{\text{misurato}}{w(j)}\big) + e(j) \qquad j = 0, 1, \dots, N$$

$\Downarrow$

$$\nu = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_\eta]^T$$

$$y^N = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(N+1)]^T$$

$\Downarrow$

$$y^N = L\nu + e^N$$

$$L = \begin{vmatrix} \sigma_1(w(0)) & \vdots & \vdots & \sigma_\eta(w(0)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_1(w(N)) & \vdots & \vdots & \sigma_\eta(w(N)) \end{vmatrix}$$

- se $f(e^N) = \mathcal{N}(0, \Sigma_e) \leftarrow$ f.d.p. gaussiana

$\Downarrow$

$$\hat{\nu}^{MV} = (L^T \Sigma_e^{-1} L)^{-1} L^T \Sigma_e \, y^N$$

PARAMETRIZZAZIONE "A BASE VARIABILE"

$$f(w, v) = \sum_{i=1}^{\eta} c_i \, \sigma(w, \alpha_i)$$

$\alpha_i \in R^{\mu}$

$$v = [c_1 \dots c_\eta \; \alpha_{11} \dots \alpha_{1\mu} \; \dots \; \alpha_{\eta 1} \dots \alpha_{\eta \mu}]^T$$

$\sigma(w, \alpha_i)$: funzione assegnata

rete neurale con 1 strato nascosto

- σ più usata

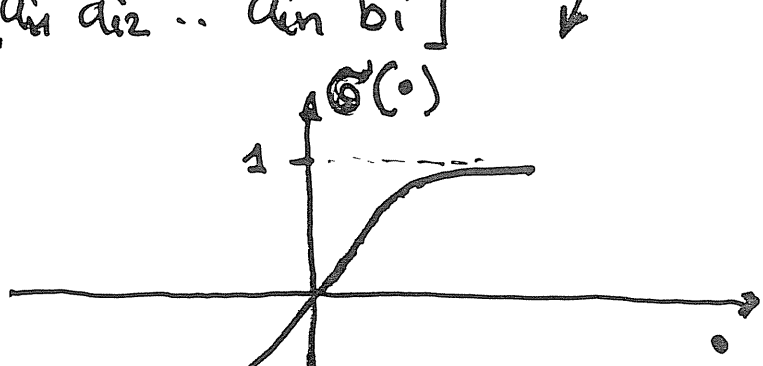
$$\sigma(w, \alpha_i) = \sigma(w^T a_i + b_i)$$

sigmoide

$a_i \in R^n$

$\alpha_i = [a_{i1} \; a_{i2} \dots a_{in} \; b_i]^T$

$$\sigma(\cdot) = \frac{e^{\cdot} - e^{-\cdot}}{e^{\cdot} + e^{-\cdot}}$$



SCELTA DELLA STRUTTURA

- Scelta struttura modelli NLTI

$\Downarrow$

  - funzioni di base
  - numero di basi
  - numero di regressori

- Non esistono metodi che generalizzano FPE, AIC, BIC

$\Downarrow$

metodo della partizione dei dati

- PROBLEMA: "curse of dimensionality"

$\Downarrow$

il <u>numero ν</u> di parametri da stimare e il <u>numero N</u> di dati da misurare per ottenere un "buon" modello <u>cresce</u> in funzione del <u>numero n</u> dei regressori

SCELTA DELLA STRUTTURA

- Nei modelli "a base fissa" la crescita può essere <u>esponenziale</u> in funzione di n

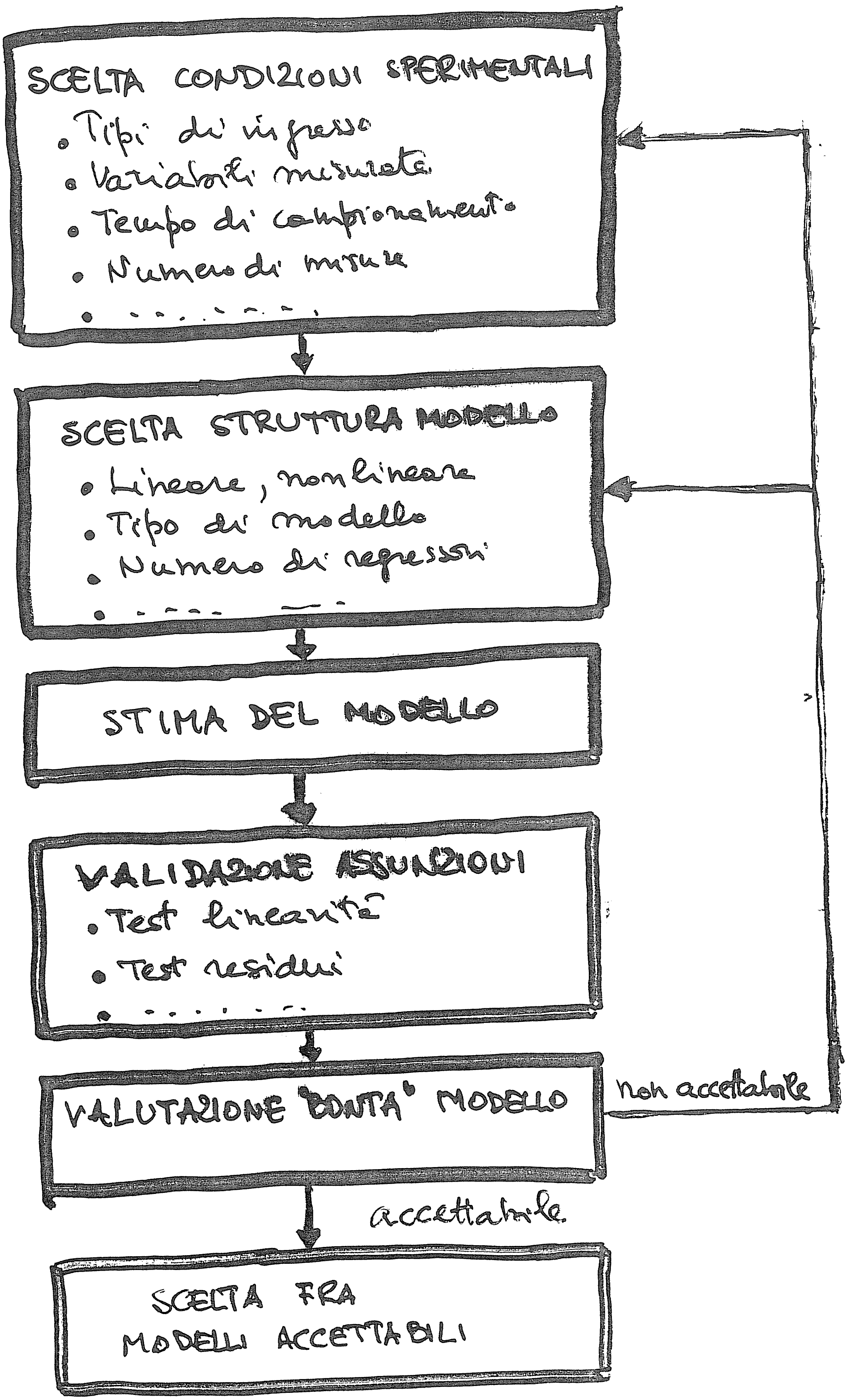
- Sotto opportune condizioni di regolarità della funzione da approssimare, nei modelli "a base variabile" la crescita è <u>polinomiale in n</u>

- La stima dei parametri ν dei modelli <u>"a base variabile"</u> richiede la minimizzazione di una <u>$R(\nu)$ non convessa</u>

$\downarrow$

intrappolamento <u>in minimi locali</u>

FASI DELLA IDENTIFICAZIONE



BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

- IDENTIFICAZIONE STATISTICA

  - L. LJUNG, "System Identifiation; Theory for the User" Prentice Hall, 1999

  - J. SJÖBERG et al, "Nonlinear black-box modeling in system identification: a survey" Automatica, 1995

- IDENTIFICAZIONE SET-MEMBERSHIP

  - M. MILANESE et al, "Bounding Approaches to System Identification" Plenum Press, 1996

  - M. MILANESE et al, "Optimality in SM identification of nonlinear systems" IFAC SYSID, 2003